

# PENGUNAAN BILANGAN NOL DALAM ALGORITHM Matrik Linear Programming

Yusmichad YUSDJA<sup>1</sup>

## ABSTRACT

Historically, the general problem of linear programming was first developed and applied in 1947 by George B. Dantzig. Programming problems are concerned with the efficient use or allocation of limited resources to meet desired objectives. The linear programming model is simple in its mathematical structure along with the algorithm of linear algebra matrix, a systematic procedure for solving the problem. The application of linear algebra matrix is quite broad. However this algorithm is not without limitation of its own. The algorithm always assume the variables to be continuous; therefore, it is seriously limited. The complication fortunately is well taken care by an integer algorithm which yields only integer solution value. The main objective of this paper is to show the difference solution of linear programming between these algorithm.

**Key words:** *operation research, linear programming, linear algebra algorithm, integer programming and zero number system*

## ABSTRAK

LP atau *linear-programming* diperkenalkan oleh George B. Dantzig tahun 1947. LP merupakan alat analisis problem optimasi dari suatu fungsi linier dengan nilai variabel yang non negatif dan dibatasi oleh pembatas yang berbentuk suatu sistem persamaan linier juga. Model ini digunakan secara luas, karena kesederhanaan bentuk matematika dan metode penyelesaiannya. Algorithm yang digunakan dalam penyelesaian LP adalah MAL (Matrik Aljabar Linier), yang mempunyai keterbatasan yakni hanya dapat bekerja dalam sistem kontinu. Keterbatasan ini sangat serius. Pertanyaannya adalah apakah penyelesaian LP mendapat dukungan yang canggih dari algorithm MAL?. Oleh karena itu, perlu dikaji bagaimana penyelesaian LP, dengan asumsi diskontinu sebagai pembandingan. Makalah ini menfokuskan diskusi pada keterbatasan atau asumsi yang digunakan oleh MAL dalam memecahkan solusi optimum LP, terutama asumsi kontinuitas tersebut. Tujuan utama dari makalah ini adalah memperlihatkan perbedaan penyelesaian optimum LP, antara algorithm kontinu dan diskontinu.

**Kata kunci :** *riset operasi, program linier algorithm aljabar linier program bilangan bulat dan bilangan nol.*

---

<sup>1</sup> Staf Peneliti pada Pusat Penelitian dan Pengembangan Sosial Ekonomi Pertanian, Bogor.

## PENDAHULUAN

LP atau *Linear Programming* diperkenalkan oleh George B Dantzig tahun 1947 semasa bekerja dalam organisasi Departemen Angkatan Udara Amerika Serikat. LP merupakan program masalah optimasi dari suatu fungsi tujuan berbentuk linier dengan nilai variabel yang non negatif dan dibatasi oleh pembatas yang berbentuk suatu sistem persamaan linier pula. Model LP digunakan pertama kali oleh Dinas Militer USA, dan sekarang merupakan salah satu model perhitungan optimasi yang sangat populer digunakan dalam berbagai ilmu pengetahuan seperti ilmu ekonomi, perbankan, ilmu bangunan, transportasi dan sebagainya. LP juga telah berkembang secara vertikal dengan munculnya model-model turunan tetapi tetap bertahan pada prinsip-prinsip dasar LP.

Namun demikian, model LP mempunyai beberapa keterbatasan yang dicirikan oleh penyelesaian LP yang selalu bersifat normatif dalam arti kata sulit dioperasionalisasikan, bahkan sering tidak mungkin. Keterbatasan ini disebabkan oleh struktur model LP itu sendiri dan algorithmanya yang digunakan untuk menghitung penyelesaian LP tersebut. Keterbatasan utama model LP terletak pada sifat linieritas persamaan, yang telah menjadi ciri khas model ini. Sedangkan keterbatasan utama algorithmanya yang digunakan terletak pada teknik penyelesaiannya. Teknik penyelesaian ini sangat penting karena suatu model matematika yang baik belum tentu mendapat dukungan yang canggih dari algorithmanya penyelesaiannya. Algorithmanya tersebut bisa saja tidak mampu secara teknis menterjemahkan model tersebut secara maksimal, sehingga penyelesaiannya pasti tidak maksimal pula, bahkan bisa keliru.

Penyelesaian optimasi LP sejalan dengan usianya, tetap bertahan menggunakan algorithmanya. Matrik Aljabar Linier (MAL), pertanyaan penting sehubungan dengan diskusi diatas adalah apakah teknik MAL mampu memberikan penyelesaian LP secara maksimal?. Hal ini tergantung pada teknik penyelesaian algorithmanya itu sendiri. Salah satu teknik penyelesaian MAL adalah penggunaan asumsi bahwa bilangan bersifat kontinu (Chiang, 1986). Asumsi tersebut sekaligus merupakan kelemahan umum semua model-model matematika. Para ahli telah banyak berusaha membangun algorithmanya yang lebih baik, seperti membangun algorithmanya integer atau bilangan bulat, namun usaha-usaha tersebut tidak menyebabkan penyelesaian problem LP menjadi lebih efisien, malah menimbulkan masalah baru. Setelah berjalan sekian abad, para ahli tidak mampu keluar dari asumsi kontinuitas tersebut, sehingga asumsi tersebut menjadi suatu hal yang wajar dan tidak perlu dipermasalahkan lagi.

Buku ini tidak bermaksud membahas struktur model LP dan juga tidak bermaksud membahas suatu algorithmanya baru, tetapi bertujuan memperlihatkan bahwa penyelesaian LP tanpa asumsi kontinu memberikan suatu sistem penyelesaian yang sama sekali berbeda. Makalah kecil ini mengkaji perbedaan-

perbedaan tersebut baik secara konsep maupun dalam praktek. Pada akhirnya makalah ini bertujuan memperlihatkan bahwa ada alasan yang sangat kuat untuk meragukan kebenaran penyelesaian algoritma kontinu khususnya MAL.

Organisasi penulisan diawali dengan ulasan singkat mengenal model LP, sekedar untuk mengingatkan pembaca. Kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenal konsep dasar penyelesaian optimasi MAL termasuk di dalamnya pembahasan mengenai asumsi kontinuitas dan diskontinuitas. Pada bagian terakhir disampaikan beberapa contoh perbedaan penyelesaian LP antara penyelesaian algoritma kontinu dan diskontinu. Alinea ini memberikan tujuh kasus pilihan yang diperkirakan cukup layak untuk meragukan kebenaran penyelesaian algoritma kontinu.

### TINJAUAN UMUM KONSEP LP DAN MAL

LP termasuk program matematika yang relatif tua, mempunyai kerangka dasar yang unik dan tetap bertahan demikian semenjak model ini diperkenalkan tahun 1947. Dalam perpustakam matematika, ditemukan begitu banyak buku teks LP dalam berbagai bahasa dan berbagai edisi. Semua buku teks itu memuat hal yang sama dari tahun ke tahun, dengan berbagai variasi dalam metode penyampaian dan contoh-contoh aplikasinya. Penulisan sub bab ini berdasarkan beberapa buku teks utama yang terbit dalam 35 tahun terakhir yakni: buku Llewellyn (1964), Gass (1975), Chiang (1980), Lieber (1994) dan Taha (1996).

### KONSEP DASAR LP

Formulasi umum LP untuk tujuan memaksimumkan adalah sebagai berikut:

Memaksimumkan :
$$Z = z_1X_1+z_2X_2+...+z_nX_n, \dots\dots\dots (1)$$

dengan pcmbatas :
$$a_{11}X_1+ a_{12}X_2 +... +a_{1n}X_n \leq B_1, \dots\dots\dots (2)$$

$$a_{21}X_1, + a_{22}X_2 + ...+ a_{2n}X_n \leq B_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ...+ a_{mn}X_n \leq B_n$$

syarat:

$$X_j \geq 0 \text{ Serta } j = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (3)$$

LP mempunyai tiga komponen persamaan yakni persamaan (1) Merupakan fungsi tujuan berbentuk linier, persamaan (2) Merupakan fungsi kendala berbentuk linier dan persamaan (3) Merupakan kondisi yang diperlukan bagi nilai X yang nonnegatif. Variabel pilihan adalah  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Koefisien variabel pilihan yang terdapat dalam fungsi tujuan dilambangkan sebagai  $z_j$ , sedangkan yang terdapat dalam fungsi kendala dilambangkan sebagai  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, m$ . Lambang  $B_j$  merupakan koefisien yang mewakili nilai batas. Nilai  $a_{ij}$ ,  $B_j$  dan  $z_j$  sudah ditetapkan terlebih dahulu. Sedangkan bentuk LP untuk meminimumkan fungsi tujuan analog dengan program memaksimumkan hanya dibedakan oleh sistem persamaan fungsi kendala yang berbentuk  $\geq$ .

Persamaan (1), (2) dan (3) merupakan bentuk dasar matematika yang telah menjadi ciri khas LP. Tujuan model ini adalah menghitung kombinasi nilai-nilai X yang dapat memaksimumkan nilai Z. Bagaimana cara menghitungnya akan sangat menentukan performan program ini. Kunci penyelesaian LP sebenarnya adalah bagaimana menghitung seluruh penyelesaian nilai X yang layak terhadap persamaan kendala, dan kemudian nilai-nilai X tersebut disubstitusikan ke dalam fungsi tujuan dan langkah berikutnya adalah mencari nilai Z maksimum. Para ahli tidak ingin melakukan itu karena dua alasan pertama, tidak perlu mencari seluruh nilai X tetapi cukup mencari nilai-nilai titik ekstrim yang layak dan kedua, kombinasi nilai-nilai X yang mungkin itu tiada terhingga banyaknya (Chiang, 1986). Alasan sebenarnya adalah bahwa para ahli belum menemukan algorithm yang mampu mencari seluruh kemungkinan nilai X tersebut, karena itu belum ada bukti bahwa kombinasi nilai X itu berjumlah tiada terhingga. Sampai saat ini, para ahli baru bisa menciptakan algoritma MAL untuk penyelesaian LP, yang sering dipermasalahkan karena sifat kontinuitas yang melekat dalam algoritma ini (Taha, 1996 dan Llewellyn, 1964).

## ALGORITHM A MATRIK ALJABAR LINIER

Penyelesaian LP dapat dilakukan melalui dua pendekatan yakni geometrik dan aljabar. Penyelesaian geometrik hanya efektif jika jumlah variabel hanya 2 dimensi, jika lebih dan 3 dimensi metode geometrik tidak dapat dilakukan. Tetapi hal itu tidak menjadi masalah karena para ahli menetapkan bahwa keragaan 3, 4 dan lebih dimensi dapat disamakan dengan keragaan 2 dimensi (Chiang, 1986). Sedangkan penyelesaian dengan aljabar menggunakan apa yang dikenal dengan algoritma MAL. MAL mempunyai kemampuan menyelesaikan persoalan LP dengan dimensi yang lebih luas, tetapi prinsip dasar MAL berpijak pada penyelesaian geometrik dua dimensi. Oleh karena itu,

betapa pun rumitnya sistem persamaan LP namun penyelesaiannya tetap berpijak pada prinsip yang sangat sederhana (Chiang, 1986).

**Properti Solusi MAL**

Berikut adalah sejumlah definisi standard dan karateristik solusi LP secara umum, sepenuhnya dikutip dari Gass (1975)

- 1. Penyelesaian fisibel problem LP adalah sebuah vektor  $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$  yang memenuhi kondisi (2) dan (3).
- 2. Solusi dasar (2) adalab solusi dengan mengatur sebanyak n-m variabel sama dengan nol, dan menyelesaikan variabel sisa, tetapi harus memenuhi syarat bahwa sistem persamaan (2) mempuyai nilai determinan  $D \neq 0$ . Sebanyak n variabel tersebut disebut variabel dasar. Sedangkan solusi dasar fisibel adalah solusi dasar yang juga memenuhi (3) yakni semua variabel dasar adalah nonnegatif
- 3. Solusi dasar fisibel nondegenerasi adalah solusi dasar yang fisibel dengan tepat sebanyak m positif  $X_i$ , yakni seluruh variabel dasar adalah positif.
- 4. Solusi maksimum fisibel adalah solusi yang fisibel yang memaksimumkan (1).
- 5. Suatu fungsi linier  $f(x)$  adalah fungsi nilai ril yang didefinisikan pada ruang vektor m dimensi.

**Konsep Titik Ekstrim (Optimum)**

Jika aturan dasar dipenuhi maka solusi optimal selalu dapat ditemukan pada salah satu titik ekstrim dalam wilayah fisibel sesuai dengan properti solusi no 2. Titik ekstrim dalam wilayah layak merupakan titik-titik sudut penyelesaian optimasi. Sehingga, dalam penyelesaian optimasi tidak perlu melakukan proses menjelajahi semua kemungkinan yang ada tetapi cukup dengan menelusuri semua titik ekstrim pada wilayah layak. Penyelesaian LP di atas dapat dilihat lebih baik melalui diagram geometrik dua dimensi (gbr 1) untuk dua persamaan pembatas berikut:

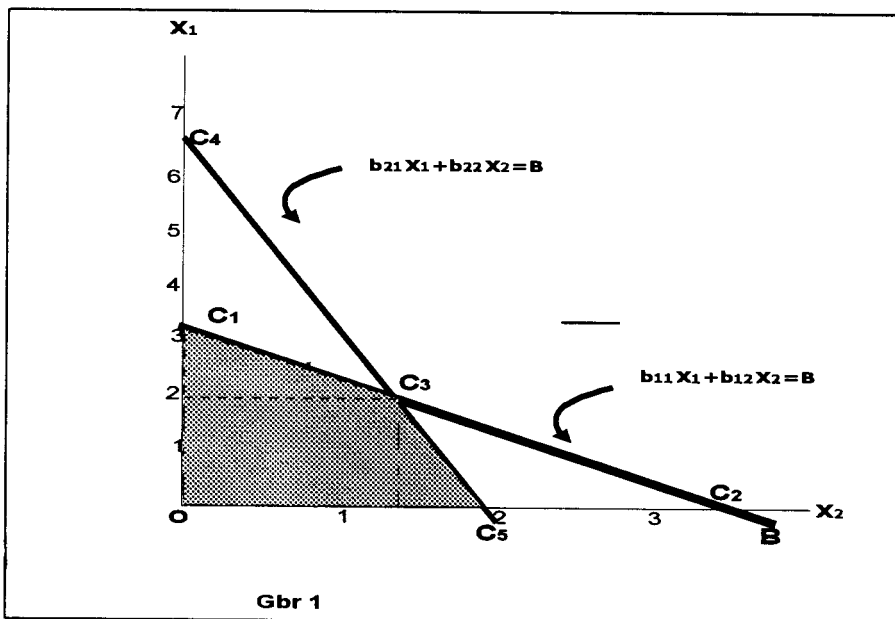
$b_{11}X_1 + b_{12}X_2 \leq B_1$  ..... (4)

$b_{21}X_1 + b_{22}X_2 \leq B_2$  ..... (5)

Plot persamaan (4) dan (5) dalam geometrik gbr (1). Daerah yang gelap merupakan wilayah fisibel bagi penyelesaian *linear programming* Pada wilayah gelap ini terdapat pilihan penyelesaian yang tiada terhingga jumlahnya, namun

yang diperlukan hanyalah menghitung titik-titik ekstrim. Titik ekstrim yang ada dalam gbr (1) sesuai dengan definisi di atas dan di dukung oleh (Chiang, 1974. p638-650) adalah:

1. Kelompok titik ekstrim yang dibentuk oleh perpotongan garis pembatas (fungsi kendala) dengan salah satu axis diagram. Titik potong ini memberikan nilai nol pada salah satu variabel dan memberikan nilai maksimum untuk variabel yang lain. Titik ekstrim kelompok ini adalah titik  $C_1$  dan titik  $C_5$ . Pada titik  $C_1$ , nilai  $X_2 = 0$  dan pada titik  $C_5$  nilai  $X_1 = 0$ . Sedangkan titik  $C_2$  dan  $C_4$  adalah titik ekstrim yang berada di luar wilayah fisibel maka kedua titik ini harus keluar dari perhitungan.
2. Kelompok titik ekstrim yang dibentuk oleh perpotongan dua persamaan pembatas yakni titik  $C_3$ . Pada titik ini nilai-nilai variabel persis memenuhi batas kedua persamaan kendala.
3. Titik ekstrim yang ketiga berada pada titik origin  $O(0, 0)$ , tetapi titik ekstrim ini hanya ditemukan pada problem minimum. Titik origin ini memenuhi syarat semua persamaan pembatas, karena nilai  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m) = (0, 0, \dots, 0)$ .



Gbr (1) secara umum telah memperlihatkan bagaimana MAL memposisikan titik ekstrim pada diagram dua dimensi. Bentuk titik ekstrim pada dua dimensi ini dianggap berlaku juga pada bentuk titik ekstrim untuk dimensi yang lebih tinggi (Chiang, 1974 p 638-650). Dari sini muncul satu pertanyaan yakni

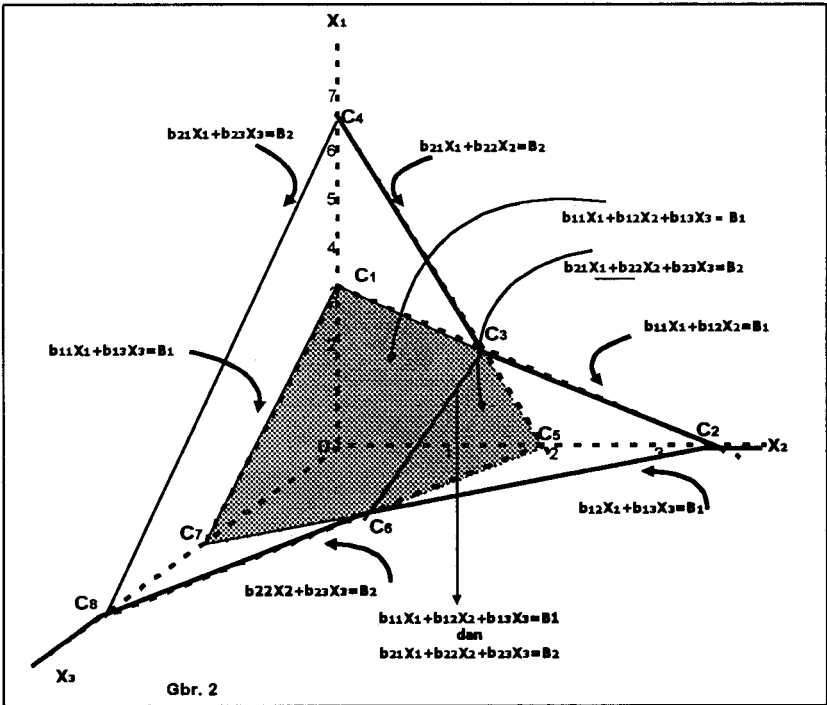
dapatkan kita menerima pernyataan bahwa keragaan dua dimensi dapat mewakili keragaan dimensi yang lebih tinggi?. Pertanyaan ini akan dibahas dalam diskusi titik ekstrim dua persamaan pembatas dengan tiga variabel berikut.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq B_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq B_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$X_3 \geq 0$$

Persoalannya adalah mencari nilai X yang memenuhi syarat dua persamaan pembatas tersebut. Plot secara hipotetis kedua sistem persamaan pembatas dalam gbr (2). Ruang gelap yang dibentuk oleh OC<sub>1</sub>C<sub>3</sub>C<sub>5</sub>C<sub>6</sub>C<sub>7</sub> merupakan wilayah fisibel untuk seluruh nilai X nonnegatif yang memenuhi syarat (6) dan (7). Pada ruang gelap ini terdapat enam titik ekstrim yakni titik 0, C<sub>1</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub> dan C<sub>7</sub>. Penyelesaian optimasi berada pada salah satu titik ekstrim ini. Titik 0 merupakan titik ekstrim paling rendah yang memberikan nilai optimasi sebesar nol. Titik ekstrim C<sub>5</sub> merupakan titik ekstrim perpotongan kurva kendala pertama persamaan (6) dengan axis 0X<sub>2</sub> dan titik C<sub>1</sub> dan C<sub>7</sub> merupakan titik ekstrim perpotongan kurva kendala kedua persamaan (6) dan (7) dengan axis 0X<sub>1</sub> dan 0X<sub>3</sub>. Titik ekstrim C<sub>3</sub> dan C<sub>6</sub> merupakan titik potong kurva persamaan (6) dan (7).



Persamaan (6) dan (7) merupakan dua persamaan bidang tiga dimensi, maka perpotongan kedua bidang ini bukan sebuah titik tetapi sebuah garis yakni  $C_3C_6$ . Dengan demikian garis  $C_3C_6$  adalah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi persis kesamaan persamaan (6) dan (7). Sesuai dengan titik ekstrim pada konsep dua dimensi yakni  $C_3$  pada gbr (1), maka kurva  $C_3C_6$  merupakan garis "titik" ekstrim atau merupakan tempat kedudukan titik-titik ekstrim. Kenyataan ini memperlihatkan bahwa konsep titik ekstrim sebenarnya tidak hanya berbentuk "titik".

Hal lain yang perlu diperhatikan adalah titik  $C_3$  dan  $C_6$ , yang merupakan titik ekstrim perpotongan persamaan kendala. Pada dua dimensi hanya ditemukan satu titik potong antara dua persamaan, sedangkan pada tiga dimensi ditemukan dua titik potong yang masing-masing  $C_3$  berasal dan perpotongan garis batas kedua persamaan pada ruang axis  $OX_1$  dan  $OX_2$  untuk  $X_3 = 0$  dan titik  $C_6$  berasal dan perpotongan garis batas pada bidang axis  $OX_2$  dan  $OX_3$  untuk  $X_1 = 0$ . Adalah menarik perhatian bahwa pada bidang ketiga yakni pada bidang axis  $OX_1$  dan  $OX_3$  untuk  $X_2 = 0$  tidak ditemukan titik potong. Gambaran titik ekstrim di atas memperlihatkan bahwa performan tiga dimensi dan dua dimensi sangat berbeda.

Selanjutnya, titik ekstrim mana yang memenuhi syarat perpotongan persamaan (6) dan (7)? Yakni titik ekstrim yang berada pada garis  $C_3C_6$ , tidak termasuk titik  $C_3$  dan  $C_6$ . Seluruh titik-titik yang berada pada garis potong ini sesuai definisi merupakan titik ekstrim untuk nilai  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , lebih besar dari nol. Dengan demikian seluruh titik sepanjang garis potong ini memfungsikan seluruh variabel  $X$  yang terdapat dalam persamaan (6) dan (7) dan tidak ada penghapusan dengan memberikan nilai  $X = 0$ . Namun demikian, MAL tidak mengakui kehadiran garis  $C_3C_6$  ini, karena MAL hanya mengakui matrik sistem persamaan pembatas dalam bentuk matrik kuadrat dan itu berarti hanya mengakui titik ekstrim yang selalu berbentuk sebuah titik dan karena itu pula MAL selalu memberikan penyelesaian yang unik. Kembali pada pertanyaan apakah benar keragaan dua dimensi adalah juga keragaan dimensi yang lebih tinggi. Jawabannya tegas bahwa tidak. Apalagi jika disamakan dengan 4 atau 10 dimensi, tidak bisa dibayangkan.

### Konsep Titik Ekstrim Diskontinuitas

Sebagaimana telah dibahas bahwa salah satu asumsi yang sangat dominan dalam menyelesaikan suatu persamaan linier adalah penggunaan asumsi hubungan antara variabel yang bersifat kontinu. Sebagai contoh konkrit, perhatikan persamaan (8):

$$113X_1 + 29IX_2 = 96000 \dots\dots\dots (8)$$



Persamaan (3) jika digambarkan dalam diagram geometrik (gbr 3) akan berbentuk sebuah kurva garis lurus AB yang bersifat kontinu tidak terputus-putus. Kurva itu berisi penuh dengan titik-titik sebagai tempat kedudukan bagi pasangan nilai  $X_1$  dan  $X_2$  yang memenuhi syarat. Konsep kontinu mengajarkan bahwa diantara dua titik dalam kurva itu selalu ada titik ke tiga. Dua titik tidak pernah berdekatan tanpa ada titik ketiga di antaranya sebagai apa yang diajarkan oleh Paradox Zeno tentang panah yang tidak bergerak yang menyebabkan kebersalahan dalam berhitung (Naga, 1980). Paradox Zeno mengatakan sebuah panah yang dilepaskan dari busurnya. Pada suatu ketika, panah itu akan menempati suatu ruang tepat sepanjang ukuran panah itu. Dalam ketika itu, anak panah tidak bergerak. Demikianlah terus menerus, maka selama itu anak panah tetap tidak bergerak. Sehingga dapat disimpulkan bahwa anak panah yang dilepaskan dari busurnya tidak dapat bergerak. Dalam sistem kontinu, penyelesaian nilai  $X_n$  dapat diperoleh melalui formula  $X_2 = (96000 - 113X_1)/291$ . Tanpa banyak membuang keringat, dengan menyebut sembarang nilai  $X_1$ , berapa saja, maka secara otomatis dapat diperoleh nilai  $X_2$ . Penyelesaian dengan cara ini akan memberikan jumlah pasangan nilai  $X_1$  dan  $X_2$  yang tidak terhingga. Dengan demikian, secara kontinu, selalu ada penyelesaian nilai  $X_2$  untuk berapa pun nilai  $X_1$ .

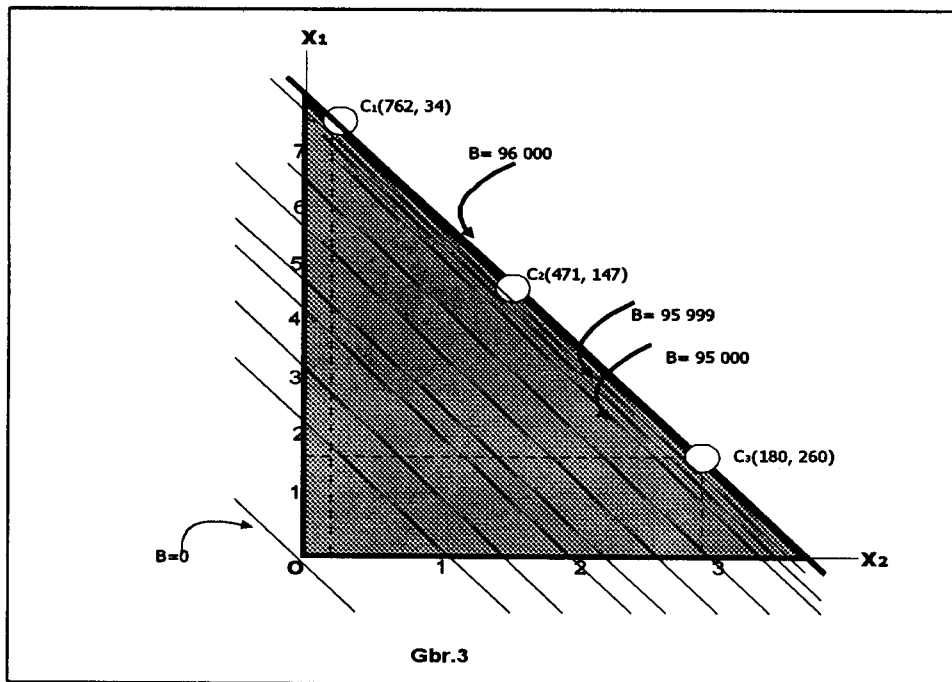
Pertanyaannya adalah apa yang terjadi dengan penyelesaian LP dalam sistem diskontinu yakni bilangan integer? Apakah selalu ada penyelesaian integer? Pertanyaan ini sangat penting karena asumsi kontinu bukan asumsi LP, tetapi asumsi algorithma MAL sehingga bukanlah suatu yang salah jika dilakukan penyelesaian LP dalam sistem integer. Misalnya berapakah nilai X bilangan bulat yang memenuhi syarat persamaan (8)? Tabel (1) memperlihatkan bahwa hanya ada 3 titik bilangan bulat penyelesaian X. Dari tiga titik ini dua di antaranya adalah titik ekstrim atau titik terujung yang satu mendekati titik ekstrim A yakni titik  $C_1 = (X_1, X_2) = (762, 34)$  dan satu lagi mendekati titik ekstrim B yakni  $C_2 = (X_1, X_2) = (180, 260)$  pada gbr (1). Artinya dalam penyelesaian integer, titik A dan B tidak lagi merupakan titik ekstrim.

Tabel 1. Nilai X Bilangan Bulat

Pilihan	$X_1$	$X_2$	B
1	762	34	96 000
2	471	147	96 000
3	180	260	96 000

Dari diskusi diskontinu ini jika dibandingkan dengan penyelesaian kontinu, yang memberikan pilihan penyelesaian yang tiada terhingga, maka penyelesaian diskontinu sebenarnya sangat sederhana, hanya tiga pilihan. Pada kenyataannya, ketiga titik pilihan integer ini justru ditutup oleh kurva

kontinu yang seakan-akan menjadi selimut titik-titik lokasi integer tersebut (gbr 3). Dari sini terlihat bahwa penyelesaian integer mempunyai kombinasi  $x$  yang terbatas. Bahkan pada suatu kondisi tertentu justru tidak ada penyelesaian integer (Encyclopedia Britannica, 2001).



Berdasarkan perbedaan geometrik kontinu dan integer di atas, maka muncul pertanyaan, bagaimana akibatnya pada definisi titik ekstrim? Tentu saja tidak perlu mengubah definisi titik ekstrim optimum, karena sistem integer hanya perlu menyesuaikan diri. Penyesuaian itu dapat dilakukan dengan menggeser suatu titik ekstrim kontinu, ke titik integer terdekat. Dalam gbr (3), titik ekstrim kontinu pada titik A pindah ke titik ekstrim integer  $C_1$  dan dari titik ekstrim kontinu B pindah ke titik ekstrim integer  $C_2$ . Pemindahan ini dapat dibenarkan karena titik ekstrim integer tetap berada pada sudut-sudut persamaan. Namun demikian arah pergeseran titik ekstrim dari titik kontinu ke titik integer tidak semudah apa yang diperlihatkan oleh gbr (3).

Kesalahan arah pergeseran dapat terjadi karena operasi aljabar yang dalam hal ini MAL. Misalnya, pemindahan titik ekstrim kontinu ke titik ekstrim integer pada gbr (2) tidak dapat dilakukan pada garis  $C_3C_6$ , karena MAL tidak mengakui kehadiran garis ini. Akibatnya pergeseran dari titik  $C_3$  -andaikata nilainya kontinu dan akan digantikan oleh nilai integer tidak akan terjadi

sepanjang garis C<sub>3</sub>C<sub>6</sub> tetapi bergeser ke arah bidang dua dimensi. Dengan demikian adalah keliru jika MAL tidak memperhatikan garis C<sub>3</sub>C<sub>6</sub> ini. Hal ini akan diperlihatkan lebih jelas dalam contoh soal pada halaman yang lain.

### Intervensi Pemberian Nol

MAL hanya dapat menyelesaikan LP sejauh matrik B mempunyai inverse (matrik kebalikan). Suatu matrik dikatakan mempunyai inverse apabila matrik tersebut memenuhi syarat keharusan dan kecukupan. Syarat keharusan, adalah bahwa matrik B harus mempunyai bentuk kuadrat. Apabila syarat keharusan itu sudah dipenuhi, maka matrik itu harus memenuhi syarat kecukupan yakni memenuhi kondisi non singular yang artinya bahwa sistem persamaan harus bebas linier. Bentuk matrik kuadrat diperlihatkan oleh jumlah baris sama dengan jumlah kolom dengan kata lain jumlah variabel (m) harus sama banyak dengan jumlah persamaan (n). Jika jumlah  $m > n$  maka MAL secara otomatis akan melakukan penghapusan sebanyak  $m-n$  variabel. Misalnya sistem persamaan berikut.

$$137 X_1 + 179 x_2 + 161 X_3 = 10.000 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$15 X_1 + 22X_2 + 19X_3 = 1,181 \quad \dots\dots\dots (10)$$

Sistem persamaan (9) dan (10) terdapat jumlah variabel  $m=3$  sedangkan jumlah persamaan  $n=2$ , maka matrik tidak berbentuk kuadrat. Dalam proses perhitungan mencari nilai X akan terjadi penghapusan sebanyak 3-2 atau satu variabel. Variabel mana yang akan dibuang adalah variabel yang tidak sesuai dengan tujuan dan fungsi objektif. Misalkan yang dihapuskan adalah variabel  $X_3=0$ , maka diperoleh sistem persamaan yang baru, yakni.

$$137 X_1 + 179X_2 = 10,000 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$15 X_1 + 22 X_2 = 1,181 \quad \dots\dots\dots (12)$$

Dalam sistem persamaan yang baru telah mempunyai bentuk kuadrat. Selanjutnya, sistem persamaan yang baru tersebut harus diuji apakah bebas linier. Pengujian bebas linier dilakukan dengan menghitung nilai diterminan (D) matrik A. Jika  $D=0$  maka matrik A tidak memenuhi syarat bebas linier. Dalam persamaan (11) dan (12) ternyata nilai  $D>0$ , oleh karena itu matrik B telah memenuhi syarat. Dengan terpenuhinya syarat keharusan dan kecukupan maka MAL dapat menghitung nilai  $X_1$  dan  $X_2$  tetapi sepanjang nilai  $X_3=0$ . Penghapusan bisa juga untuk  $X_1=0$  atau  $X_2=0$  sehingga nantinya akan diperoleh tiga pilihan jawaban. Penghapusan ini pada sisi lain telah menyebabkan hilangnya garis C<sub>3</sub>C<sub>6</sub> pada gbr (2) di atas. Apakah penghapusan ini dapat dibenarkan? Jawaban pertanyaan ini disampaikan dalam contoh-contoh soal berikut.

## BEBERAPA KASUS PERBANDINGAN PENYELESAIAN MAL DAN INTEGER

Berikut ini adalah contoh penyelesaian kontinu (MAL) dan integer untuk memperlihatkan perbedaan di antara keduanya.

### Kasus 1

Pemerintah akan mengirimkan 907 orang transmigran dari Jawa ke Lampung melalui darat, udara dan laut. Pemerintah sudah menerima penawaran dari lima buah perusahaan berbagai jenis angkutan sebagai berikut: (1) Perusahaan bis mini ( $X_1$ ) dengan kapasitas penumpang 23 orang dan sewa kendaraan Rp. 475 000 per bis; (2) Perusahaan bis besar ( $X_2$ ) dengan penumpang 41 orang dan sewa Rp. 921 000 per bis; (3) Kereta api ( $X_3$ ) dengan penumpang 97 orang dengan biaya sewa Rp. 737 000 per gerbong; (4) Kapal laut mini ( $X_4$ ) dengan penumpang 71 orang dan biaya sewa Rp. 1111 000 per kapal; dan (5) Pesawat hercules ( $X_5$ ) dengan kapasitas penumpang 57 orang dengan biaya sewa Rp. 2431 000 per pesawat.

Pemerintah bermaksud melibatkan semua perusahaan angkutan sebanyak-banyaknya untuk mendorong perusahaan-perusahaan angkutan cepat berkembang, tetapi dengan biaya yang tidak lebih dari Rp. 18923000 dan semua penumpang sebanyak 907 orang harus dapat diangkut. Problem ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

Memaksimumkan

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \dots\dots\dots (13)$$

Kendala

$$23X_1 + 41X_2 + 97X_3 + 71X_4 + 57X_5 = 907 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$475X_1 + 921X_2 + 737X_3 + 1111X_4 + 2431X_5 \leq 18923 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$X > 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

Persoalan ini menuntut tiga syarat yakni semua penumpang harus terangkut, jumlah kendaraan harus maksimum dan biaya angkut yang lebih kecil dari yang tersedia. Sedangkan syarat (16) bahwa  $X > 0$ , mempunyai pengertian bahwa semua jenis kendaraan dari semua perusahaan harus diangkut sertakan dalam proyek transmigrasi.

MAL dipastikan tidak akan dapat menyelesaikan problem ini karena MAL membutuhkan syarat  $X \geq 0$ . Seluruh perangkat lunak program LP secara otomatis telah memperlakukan syarat  $X \geq 0$  sehingga begitu data dimasukan ke

dalam komputer secara otomatis telah diposisikan nilai  $X \geq 0$ . Penyelesaian kasus 1 dengan nilai  $X \geq 0$  dan  $X$  kontinu disampaikan pada Tabel (2). Penyelesaian kontinu memperlihatkan bahwa nilai maksimum kendaraan yang disarankan adalah  $Z = 39.434783..$  tetapi dengan melibatkan satu jenis kendaraan saja yakni bis mini atau  $X_1$ . MAL tidak mampu mengakomodasi permintaan pemerintah untuk melibatkan semua perusahaan angkutan karena MAL lebih tertarik pada memaksimalkan  $Z$ .

Pada sisi lain, penyelesaian nilai  $Z = 39.43...$  merupakan bilangan desimal tidak berujung, tidak jelas berapa sebetulnya jumlah mobil sebanyak itu dan apakah benar bisa mengangkut 907 penumpang?. Stokey dan Zeckhauser (1978 p197) dan beberapa penulis lainnya berpendapat bahwa penyelesaian desimal hanya berbeda sangat kecil andaikata nilai itu dibulatkan saja. Mengikuti gagasan ini dan supaya semua penumpang dapat terangkut, maka  $X_1$  harus dibulatkan ke atas, sehingga  $X_1 = 40$  dan  $Z = 40$  (Tabel 2).

Tabel 2. Penyelesaian (18) Dengan Metode Kontinu

Metode	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$B_1$	$B_2$	$Z$
Kontinu	39.43	0	0	0	0	907	177.56...	39.43
Pembulatan	40	0	0	0	0	920	19000	40

Akibat dari pembulatan ke atas ini, nilai  $X_1$  menjadi lebih besar sekalipun dengan perubahan yang sangat kecil. Jika nilai  $X_1$  disubstitusikan kembali ke dalam persamaan kendala (14) dan (15), ternyata biaya angkutan meningkat menjadi  $B = 19000$  lebih besar dari dana yang tersedia dan jumlah kursi penumpang meningkat menjadi 920 orang atau terdapat pemborosan sebanyak 13 kursi kosong. Berarti usaha pembulatan memberikan nilai  $X$  yang tidak memenuhi syarat, karena itu pembulatan tidak dapat dibenarkan. Penyelesaian ilmiah menuntut suatu kebenaran bukan soal perbedaan kecil atau besar pada alinea berikut akan diperlihatkan pula bahwa pembulatan itu adalah suatu intervensi yang keliru.

Tabel 3. Penyelesaian (13) menurut Sistem Kontinu dan Integer

Pilihan	Bis Mini	Bis Besar	K. Api	K. Laut	Hercules	Orang	Biaya	Biaya/Orang	$Z$
Kontinu	39.43	0	0	0	0	907	18,729	20.7	39.4
Integer	31	3	0	1	0	907	18599	20.5	35

Tabel (3) memperlihatkan bagaimana penyelesaian problem I dengan sistem bilangan bulat dan  $X > 0$ . Terlihat bahwa penyelesaian nilai Z dalam bilangan bulat adalah  $Z=35$  untuk  $X = (31, 3, 0, 1, )$ , jelas lebih nyata dibandingkan penyelesaian integer  $Z=39.43...$  sekali pun  $Z$  integer  $< Z$  kontinu. Selain itu, penyelesaian integer menawarkan biaya angkut yang lebih rendah. Kesimpulannya adalah bahwa penyelesaian bilangan bulat merupakan pilihan yang terbaik.

Tabel 4. Pilihan Penyelesaian Integer Problem (18) dan (22).

Pilihan	Bis Mini	Bis Besar	K. Api	K. Laut	Hercules	Jumlah Penumpang	Biaya Total	Biaya/ Penumpang	Z
1	5	2	6	1	1	907	12,181	13.4	15
2	11	1	5	1	1	907	13,373	14.7	19
3	4	1	3	6	1	907	14,129	15.6	15
4	5	5	4	2	1	907	14,581	16.1	17
5	3	3	4	3	2	907	15,331	14.9	15
6	11	4	3	2	1	907	16,081	17.4	21
7	1	1	4	4	3	907	16,523	17.7	13
8	9	2	3	3	2	907	16,529	18.2	19
9	4	4	1	7	1	907	16,965	18.2	17
10	17	3	2	2	1	907	16,965	18.7	25
11	5	8	2	3	1	907	16,981	18.7	19
12	2	2	1	8	2	907	17,279	19.1	15
13	15	1	2	3	2	907	17,715	19.5	23
14	3	6	2	4	2	907	17,731	19.5	17
15	23	2	1	2	1	907	18,157	20.0	29
16	11	7	1	3	1	907	18,173	20.0	23
17	6	2	4	1	4	907	18,475	20.4	17
18	1	4	2	5	3	907	18,481	20.4	15
19	9	5	1	4	2	907	18,923	20.9	21

Namun demikian, pemerintah tidak dapat menerima penyelesaian baik kontinu maupun integer pada Tabel (3) karena keduanya mengabaikan persyaratan untuk melibatkan semua jenis kendaraan. Untuk menjawab masalah ini, perlu penyelesaian kasus 1 dengan syarat  $X > 0$  dan dalam sistem integer. Tabel (4) memberikan 19 pilihan alokasi sumberdaya yang memenuhi optimasi Z pada kasus 1. Beberapa kesimpulan dan Tabel (4). adalah sebagai berikut.

1. Ke 19 pilihan tersebut ternyata dapat memenuhi ketiga permintaan pemerintah yakni semua penumpang terangkut, semua jenis kendaraan dilibatkan dan biaya yang lebih rendah dan yang dianggarkan. Seluruh nilai-nilai dalam bentuk bilangan bulat, sehingga penyelesaiannya jelas dan ilmiah. Pemerintah tinggal memilih salah satu penyelesaian yang terbaik berdasarkan pertimbangan-pertimbangan yang tidak dapat dimasukkan ke dalam model. Salah satu kekayaan gagasan ini bahwa kita dapat meng-

gunakan Tabel (4) untuk berbagai tujuan optimasi banyak hal, seperti mengoptimumkan nilai  $X_1$ , meminimumkan biaya per orang dan sebagainya, tanpa harus mengganti fungsi tujuan. Hal ini tidak dapat dilakukan oleh MAL.

2. Jumlah kendaraan terbanyak yang bisa dilibatkan adalah 29 kendaraan (pilihan ke 15) dengan menghabiskan 96 persen dari dana yang tersedia dan dengan biaya per orang yang lebih rendah dengan penghematan sebesar Rp 766 ribu rupiah dibandingkan dengan apa yang disarankan oleh penyelesaian kontinu dan integer untuk  $X \geq 0$  pada Tabel (3).
3. Karena tersedia banyak pilihan penyelesaian, maka pemerintah dapat memanfaatkan pilihan tersebut untuk menjamin program transmigrasi berjalan sesuai dengan rencana. Dengan kata lain, tersedianya banyak pilihan memungkinkan Pemerintah memperhatikan variabel penting lainnya yang belum atau tidak bisa dimasukkan dalam program. Pemerintah, misalnya dapat melakukan survey pada setiap perusahaan berapa banyak kendaram yang dapat mereka sediakan. Dengan berpijak pada hasil survey tersebut, pemerintah dapat melakukan pilihan-pilihan yang rasional dan secara teknis dapat dilaksanakan sesuai dengan kondisi yang ada.

## Kasus 2

Andaikata Pemerintah ingin meminimumkan biaya angkutan, maka persoalannya dapat dirumuskan sebagai berikut:

Minimumkan

$$Z = (475/907)X_1 + (921/907)X_3 + (737/907)X_3 + (1111/907)X_4 + (2431/90)X_5 \quad \dots\dots\dots (17)$$

Kendala

$$23X_1 + 41X_3 + 97X_3 + 71X_4 + 57X_5 = 907 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$475X_1 + 921X_3 + 737X_3 + 1111X_4 + 2431X_5 \geq 18923$$

$$X > 0$$

Tabel 5. Hasil Perhitungan (16), (17) dan (18) Dengan Sistem Kontinu dan Integer

Pilihan	Bis Mini	Bis Besar	Kereta Api	Kapal Laut	Hercules	Orang	Biaya total	Z biaya/orang
Kontinu :	0	0	0	10.3072	3.0735	907	19	20.8483
Integer $X > 0$	9	5	1	4	2	907	19	209

Penyelesaian dengan MAL memberikan nilai optimum biaya per orang adalah  $Z = 20.8483$ . dan menyarankan hanya dua perusahaan yang terlibat yakni Kapal Laut ( $X_4$ ) dan Hercules ( $X_5$ ) sedangkan nilai  $X$  yang lain yakni  $X_1$ ,  $X_2$ , dan  $X_3$  mempunyai nilai nol. Nilai-nilai penyelesaian  $X$  bersifat kontinu, hampir seluruhnya berbentuk desimal tak berujung. Pada baris terakhir disampaikan penyelesaian integer untuk  $X > 0$  yang diambil dari Tabel (4). Nilai  $Z$  sama namun sangat berbeda dalam alokasi nilai  $X$ . Dan sekali lagi diperlihatkan bahwa pembulatan penyelesaian kontinu seharusnya adalah penyelesaian integer. Jadi tidak dapat dilakukan karena alasan perbedaan yang sangat kecil antara bilangan desimal dengan pembulatannya.

Kembali pada konsep titik ekstrim, ternyata Tabel (5) memberikan penyelesaian integer yang berada pada titik ekstrim perpotongan antara dua persamaan kendala, yakni garis  $C_3C_6$  pada gbr (3). MAL tidak menjangkau garis ini, sebagaimana diperlihatkan bahwa penyelesaian MAL yang juga berada pada titik ekstrim tetapi dengan variabel  $X_1$ ,  $X_2$  dan  $X_3$  yang masing-masing bernilai nol. Maka jelas penyelesaian integer merupakan pilihan yang terbaik dibandingkan penyelesaian kontinu karena lebih benar secara ilmiah

### Kasus 3

Jika kasus 1 diubah menjadi masalah minimasi yakni dengan meminimumkan  $Z$ , maka rumusan persoalannya berubah menjadi :

**Minimumkan:**

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad \dots\dots\dots (19)$$

**Kendala**

$$23X_1 + 41X_3 + 97X_3 + 71X_4 + 57X_5 = 907 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$475X_1 + 921X_3 + 737X_3 + 1111X_4 + 2431X_5 \geq 18923 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$X > 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

Tabel (6) memberikan hasil perhitungan algorithma MAL dan integer. Penyelesaian kontinu memberikan nilai minimum  $Z$  sebesar Rp 18.923 ribu, sesuai dengan persyaratan minimal. Penyelesaian algorithma kontinu sebagaimana biasa memberikan nilai  $X$  dalam bentuk desimal tidak berujung, nilai  $X$  tidak bersifat natural. ini berarti penyelesaian kontinu, tidak dapat dilaksanakan (normatif). Berbeda dengan penyelesaian integer (Tabel 6, lajur integer) yang memberikan nilai  $X$  yang sangat akurat.



**Tabel 6. Penyelesaian (18) Menurut Kontinu dan Integer Pada Kurva Perpotongan**

Pilihan	Bis Mini	Bis Besar	K. Api	K. Laut	Herhules	Orang	Biaya	Biaya/ Orang	Biaya/ Kendaraan	Z
Kontinu	0	0	5.811	0	6.022	907	18.923	20.9	1.603	11.8
Integer										
$X \geq 0$	1	0	5	0	7	907	21.177	23.3	1629	13
$X > 0$	2	5	1	4	2	907	18.933	20.9	901	21.0
$X > 0$	9.00	8.00	3.00	1.00	3.00	907.00	18.933	20.30	1114.00	17.00

Tabel (6) memberikan tiga pilihan. Pilihan 1 mencoba memberikan penyelesaian bilangan bulat yang mendekati penyelesaian kontinu integer tetapi dengan syarat nilai  $X \geq 0$ . Terlihat bahwa biaya perorang dan Z membengkak. Padahal untuk tingkat biaya minimum sebesar Rp 18.923, pilihan II dengan syarat  $X \geq 0$  menawarkan suatu sebaran nilai X yang sangat berbeda dan lebih akurat. Biaya per orang sama dengan penyelesaian kontinu, sementara pilihan ke 2 menawarkan biaya per kendaraan yang jauh lebih murah. Pilihan III memberikan penawaran yang juga menarik, yakni dengan biaya sedikit lebih mahal yakni dari Rp 18.923 menjadi Rp 18.933 memberikan sebaran nilai kendaraan yang sangat jauh berbeda dengan penyelesaian minimum, namun tingkat biaya per orang dan per kendaraan lebih rendah dari penyelesaian minimum MAL. Pilihan ini sangat penting mengingat komposisi X yang sangat berbeda. Dengan demikian penyelesaian integer jauh lebih baik dibandingkan penyelesaian kontinu. Pada sisi lain, jika kita perhatikan penyelesaian kontinu pada baris pertama yang ternyata menghabiskan semua nilai B maka berarti titik ini merupakan titik ekstrim perpotongan kedua kendala  $B_1$  dan  $B_2$ . Namun titik potong itu sebenarnya tidak berada persis pada kedua kendala karena nilai  $X_1$ ,  $X_2$  dan  $X_4$  adalah nol sedangkan  $X_3$  dan  $X_5$  berbentuk kontinu. Sementara penyelesaian integer baris kedua lajur integer juga berada pada titik ekstrim perpotongan kedua kendala dengan nilai  $X > 0$  dan dalam bilangan bulat. Maka sekali lagi diperlihatkan bahwa perhitungan MAL mengandung kelemahan.

**Kasus 4**

Berikut ini disampaikan dua kasus intervensi menolak X yakni kasus 4 dan kasus 5. Kasus 4 memperlihatkan hasil perhitungan antara intervensi memberikan nilai  $X=0$  dan jika tidak melakukan intervensi. Sedangkan K 5 memperlihatkan distorsi akibat intervensi. Kedua kasus ini memperlihatkan bahwa intervensi memberikan nilai  $X=0$  adalah suatu yang keliru karena membatasi mekanisme perhitungan alami sehingga terjadi distorsi dalam proses perhitungan.

Kasus 4 adalah problem LP yang terdiri atas empat variabel ( $n=4$ ) dan satu persamaan ( $m=1$ ). Kasus 4 ini dengan sengaja berbentuk satu persamaan

untuk melihat lebih jelas dampak intervensi dan bagaimana penyelesaian bilangan bulat memberikan penyelesaian yang lebih benar, sebagai berikut:

**Maksimumkan**

$Z = X_1+X_2+X_3+X_4$  ..... (23)

**Kendala**

$53X_1+ 102X_2+81X_3 +67X_4=043$  ..... (24)

$X_i \geq 0$  ..... (25)

Sesuai dengan konvensi MAL dalam penyelesaian optimasi LP maka penyelesaian (23) adalah dengan memaksa sebanyak 4-1 = 3 variabel harus diberi nilai nol, sehingga terbentuk matrik kuadrat. Tiga variabel mana yang akan dipaksa bernilai nol itu tergantung pada kontribusi masing-masing X terhadap pencapaian maksimum nilai Z. Penyelesaian kontinu mengandung empat pilihan nilai X dan Z sebagaimana disampaikan pada Tabel (7) dan setiap pilihan penyelesaian yang layak selalu diwarni oleh tiga X bernilai nol dan nilai X ke empat secara kebetulan berbentuk kontinu. Penyelesaian kontinu untuk nilai maksimum adalah Z=19.679...untuk X= (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>) = (19.679..; 0; 0; 0).

Tabel 7. Nilai X dan Z Sistem Kontinu dari Pers. (23).

Pilihan	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	B	Z
1	0	0	0	15.567	1,043	15.567
2	0	0	12.877	0	1,043	12.877
3	0	10.225	0	0	1,043	10.225
4	19.679	0	0	0	1,043	19.679

Bagaimana dengan penyelesaian integer dan tanpa intervensi terhadap nilai X?. Tabel (8) memperlihatkan penyelesaian integer untuk nilai X≥0 khusus untuk penyelesaian titik ekstrim yang berpotongan dengan salah satu axis- dan penyelesaian integer untuk nilai X>0. Tabel (7) memperlihatkan empat pilihan penyelesaian yang sama baiknya dari nilai maksimum Z. Ke 14 pilihan titik ekstrim tersebut sama sekali berbeda dengan apa yang ditampilkan oleh penyelesaian kontinu dalam Tabel (7), dengan rincian sebagai berikut :

1. Nilai maksimum Z penyelesaian kontinu dan integer berbeda. Penyelesaian integer memberikan kelebihan dengan menampilkan multisolusi artinya menampilkan berbagai pilihan penyelesaian pada tingkat optimum yang sama tetapi berbeda dalam alokasi nilai X. Sedangkan penyelesaian kontinu memberikan nilai X yang tidak jelas.

2. Tabel (8) memperlihatkan ke 5 pilihan titik ekatrim yang ada ternyata tidak memperlihatkan adanya kombinasi nilai  $X_2 = X_3 = X_4 = 0$  seperti yang ditampilkan dalam penyelesaian kontinu. ini sangat menarik, karena membukukan bahwa penyelesaian kontinu adalah keliru.

Tabel 8. Nilai X dan Z Sistem Integer

Pilihan	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	B	Z
Integer $X \geq 0$						
1	0	1	5	8	1043	14
2	4	1	9	0	1043	14
3	0	3	0	11	1043	14
4	5	5	0	4	1043	14
5	7	5	2	0	1043	14
$X > 0$						
1	1	1	6	6	1043	14
2	2	1	7	4	1043	14
3	3	1	8	2	1043	14
4	1	3	1	9	1043	14
5	2	3	2	7	1043	14
6	3	3	3	5	1043	14
7	4	3	4	3	1043	14
8	5	3	5	1	1043	14
9	6	5	1	2	1043	14

### Kasus 5

Berikut adalah problem menarik dari buku LP karya Gass (1986) sehubungan dengan intervensi pemberian nilai  $X=0$ , antara penyelesaian optimasi dalam sistem bilangan kontinu dan integer.

Minimumkan

$$Z = X_1 - 5X_2 + 22X_3 - X_4 + 2X_5 \dots\dots\dots (26)$$

Kendala

$$57X_1 + 102X_2 + 81X_5 = 2043$$

$$X_2 - 4X_3 + X_4 = 3 \} \dots\dots\dots (27)$$

$$-2X_2 + X_3 + X_5 = 6$$

$$X \geq 0 \dots\dots\dots (28)$$

Kendala (27) mengandung lima variabel ( $n=5$ ) dan tiga baris persamaan ( $m=3$ ). Sesuai dengan dengan konvensi, maka untuk pemecahan (26) harus

dilakukan intervensi dengan memberikan nilai nol kepada sebanyak  $n-m$  atau  $5-3=2$  variabel  $X$ . Variabel  $X$  yang mana yang akan diberi nilai nol, sangat tergantung pada tujuan optimasi. Hasil perhitungan dengan menggunakan software GULP (ooo) yang memberikan nilai optimum (minimum).

$$\begin{aligned}
 Z &= 39.473... \text{ dan } \dots\dots\dots (29) \\
 X &= (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \\
 &= (30.473..., 3, 0, 0, 12).
 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan memperlihatkan bahwa nilai  $Z$  dan  $X$  dalam bentuk bilangan kontinu dan dua variabel yang diberi nol adalah  $X_3$  dan  $X_4$ , dengan kata lain kedua variabel ini tidak diperlukan, dan dapat dihapus dari persamaan. Pada akhirnya kita melihat bahwa problem (26) sudah dapat diselesaikan dengan baik sesuai dengan perjanjian. Intervensi menolak sebagian  $X$  memang telah berhasil membuat problem rumit dan kompleks menjadi sangat sederhana. Bagaimana dengan penyelesaian tanpa intervensi dan dalam bilangan integer sebagaimana disampaikan pada Tabel (9)?.

Tabel 9. Sebaran Nilai  $X$  Persamaan (26) Integer

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$Z$
33	0	2	11	4	2043	3	6	74
28	2	3	13	7	2043	3	6	85
23	4	4	15	10	2043	3	6	96
18	6	5	17	13	2043	3	6	107
13	8	6	19	16	2043	3	6	118
8	10	7	21	19	2043	3	6	129
3	12	8	23	22	2043	3	6	140

Tabel (9) memperlihatkan bahwa nilai optimum  $Z= 74$ . Nilai  $Z$  merupakan nilai optimum terkecil untuk bilangan bulat Tidak mungkin ada yang lebih kecil. Hal ini dibuktikan berdasarkan sifat fungsi turunan bahwa nilai  $Z$  mencapai optimum jika salah satu turunan  $X$  sama dengan bilangan integer terkecil atau turunan itu mendekati nol. Pada Tabel (9) kita menemukan bahwa nilai  $X_2$  dimulai dari nol dan semakin tinggi nilai  $X_2$  maka semakin tinggi nilai  $Z$ . Nilai  $Z$  terendah adalah  $Z= 74$ . Padahal nilai optimum yang ditemukan oleh algoritma kontinu adalah  $Z =39.473...$  Solusi mana yang benar? Untuk menjawab pertanyaan ini, Tabel (10) memberikan resume dari solusi kontinu dan

integer. Berdasarkan Tabel (10) dapat disampaikan beberapa hal sebagai berikut:

1. Variabel  $X_3$  dan  $X_4$  masing-masing mempunyai nilai  $dX$  ( $dX_3, dX_4$ ) (1, 3) sedangkan nilai dasar adalah  $X = (X_3, X_4) = (2, 11)$ . Jika nilai  $dX$  disubstitusikan kedalam nilai  $X$  maka pada saat  $X_3 = 0, X_4 \neq 0$ . Artinya tidak mungkin nilai  $X_3 = X_4 = 0$  seperti diperlihatkan oleh penyelesaian kontinu. Berdasarkan kenyataan ini, dapat dikatakan bahwa penyelesaian dengan intervensi memberikan sebagian  $X=0$  adalah keliru sehingga yang benar adalah nilai optimum C 74
2. Bukti lain adalah bahwa penyelesaian kontinu memberikan nilai  $X_1=30.47...$  dan  $Z =39.47..$ sedangkan penyelesaian diskontinu, pada saat  $X_1$  30.47 tersebut, ternyata nilai  $Z = 79.61$  (Tabel 4.9). Pada sisi lain pada saat  $X_3 =0$  dan  $X_4$  mendekati nol, ternyata nilai  $X_2$  dan  $X_5$  negatif sehingga tidak memenuhi syarat penyelesaian kendala persamaan (26). Maka cukup bukti bahwa intervensi konvensi sekali pun membuat persoalan menjadi sederhana tetapi tidak dapat dibenarkan.

Tabel 10. Sebaran Nilai X Persamaan (26)

Sistem	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Z
Integer	33	0	2	11	4	2043	3	6	74
Kontinu	30.47...	3	0	0	12	2043	3	6	39.47
Integer	30.45	1.02	2.51	12.02	5.53	2043	3	6	79.61
Integer	43	-4	0	7	-2	2043	3	6	52

KESIMPULAN

*Linear programming* merupakan program matematika masalah optimasi yang memiliki struktur yang unik sehingga seharusnya penyelesaian optimum yang diberikannya hanya dibatasi oleh strukturnya tersebut. Pada kenyataannya, penyelesaian *Linear programming* tidak hanya dibatasi oleh bentuknya tetapi juga oleh algorithma aljabar yang digunakan yakni matrik aljabar linier. Algorithmamatrik aljabar linier terbukti tidak dapat menterjemahkan formulasi *linear programming* ke dalam perhitungan yang tepat dan bahkan telah membuat kesalahan.

Beberapa kesalahan algoritma matrik linier ini secara konsepsi adalah penggunaan beberapa asumsi yakni kontinuitas dalam sistem bilangan, menjadikan penyelesaian dua geometrik dua dimensi sebagai dasar bagi penyelesaian dimensi yang tinggi dan menetapkan bahwa matrik harus berbentuk kuadrat. Makalah ini telah mencoba memperlihatkan kesalahan-kesalahan ini secara praktis dengan membandingkan hasil perhitungan *linear programming* dengan menggunakan algoritma yang bersifat diskontinu, bebas dimensi dan bentuk matrik yang sembarang.

Kesimpulan lain adalah bahwa penyelesaian diskontinu jauh lebih baik karena selain lebih tepat tetapi juga mampu memberikan berbagai penyelesaian lain yang tetap bertumpu pada titik optimasi dan dapat pula memberikan berbagai pilihan penyelesaian berdasarkan berbagai kriteria alokasi pembatas pada X. Penyelesaian diskontinu, karena keunggulannya tersebut dapat memberikan penyelesaian yang praktis dan dinamis. Dengan demikian, khususnya ilmu ekonomi, sebagai ilmu yang mempelajari tentang pilihan alokasi sumber daya akan dapat bekerja lebih baik dalam menggunakan *Linear programming*. Bahkan mungkin, dapat membuka jalan bagi menata kembali ilmu ekonomi yang lebih sesuai dengan sosial-budaya suatu negara.

## DAFTAR PUSTAKA

- Gags. S. I:1975. LP. Methods & Aplications. Fourth Edition. p.ix.. International Student Edition. Mcgraw-Hill Kogakusha, LTD. London.
- Liewellyn R. W. 1964. Linear Programming Holt Rinehart and Winston. New York.
- Chiang. A. C.1974. Fundamental Methods of Mathematical Economic. International Student Idition. Mc Graw-Hill. Kogakusha LTD. Tokyo.
- Encyclopedia Bntannica, 2001 Chineae Theorem Bntannica @, Deluxe Edition. London.
- Hillier, F. S. and G.J. Lielberman. 1994. Introdution to Operation Research. Fifth Edition. Mc Graw-Hill. London.
- Naga, D. S. 1980. Berhitung, Sejarah dan Pengembangannya. Grainedia. Jakatta.
- Taha. H. A. 1996. Operations Research. Terjemahaan oleh D. Wirajays. Binarupa Aksara. Jakarta.
- Y Yusdja 1987 Bilangan Misteri dan Kekeliruan Komputer Kompas Mmggu 9 Agustus 1987. Gramedia Jakarta

- .1988. Matematika "Basica" Komputer Mampu Membuat Kesalahan Fatal. Kompas. Rabu 21 Desember 1988. Gramedia. Jakarta
- .1994. Analisa Pilihan Ekonomi Dalam Multisolusi Optimum Model"Linear Programmieg". JAE. Vol.13, Nomor 2. Pusat Penelitian Sosial Ekonomi Pertanian Bogor.
- .2001 Algorithma Bilangan Integer. Belum diterbitkan Pustaka Pribadi Bogor
- Stokey E. dan R. Zeckhauaser, 1978. A Priiner for Policy Analysis. p197. WW Norton & Company. New York-London.